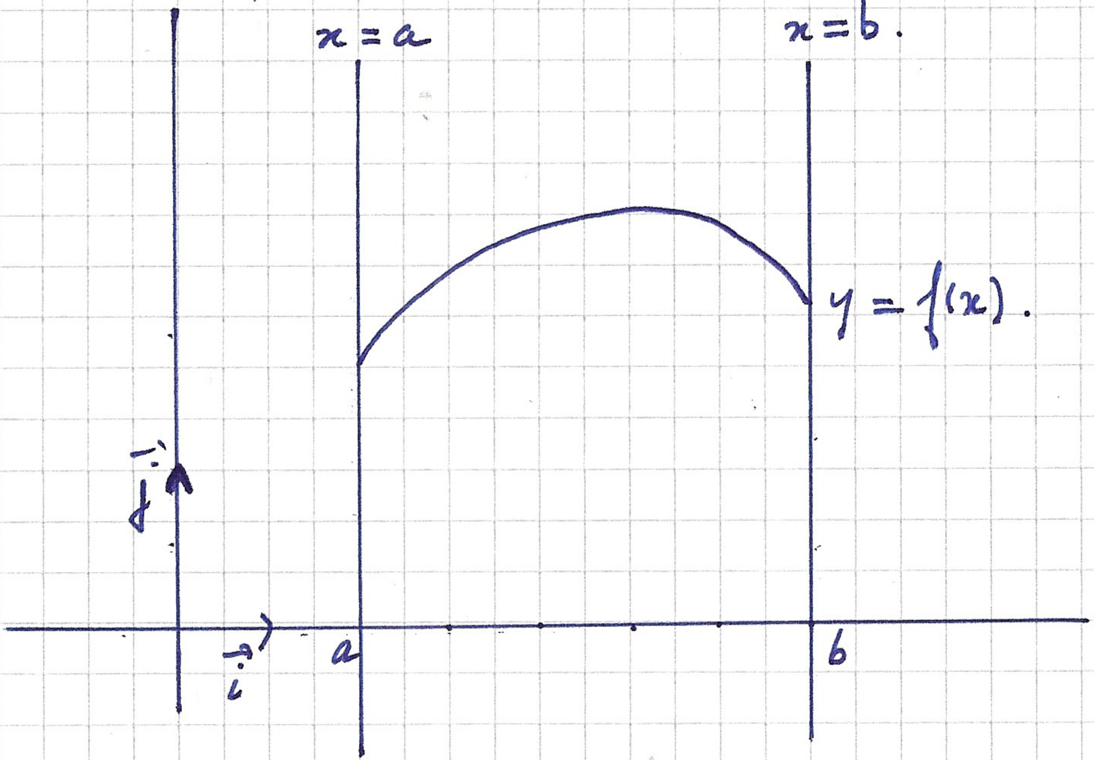
Activité : de moyenne "discrète" à la moyenne "continue"

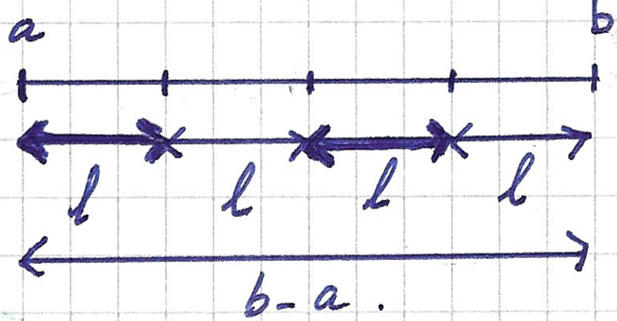
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et positive sur $[a ; b]$.



Quel sens donner à la moyenne de la fonction continue sur $[a ; b]$?

Soit n un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).
Divisons l'intervalle $[a ; b]$ en n intervalles de même longueur l.

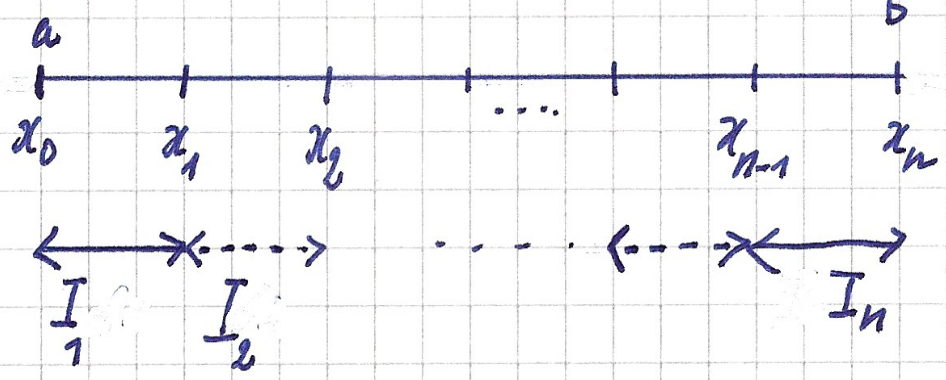
$(n=4)$

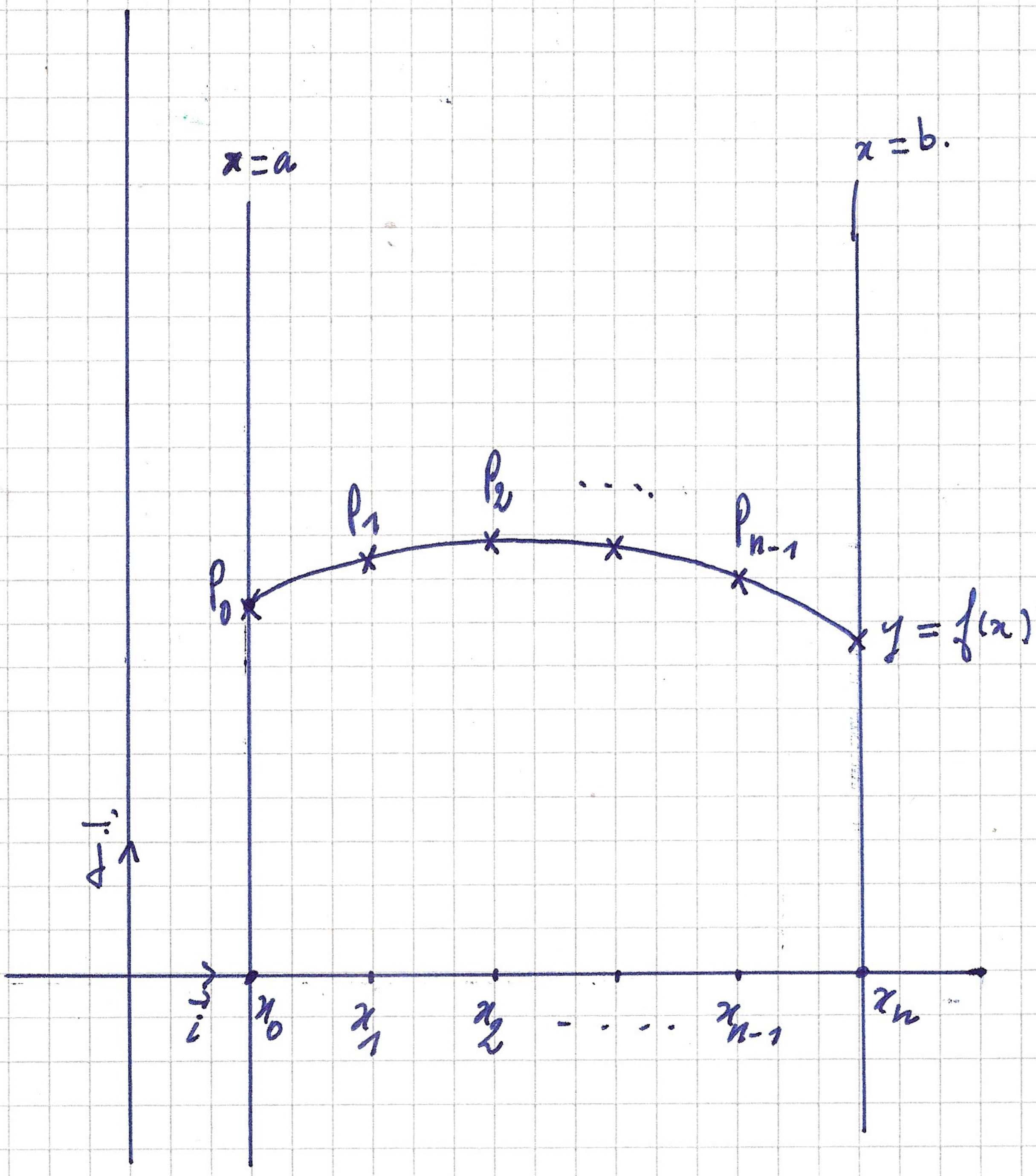


On a $\quad n\ell = b-a \quad ; \quad \boxed{\ell = \frac{b-a}{n}}$

Posons

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a, \\
x_1 &= x_0 + \ell = a + \ell, \\
x_2 &= x_1 + \ell = a + 2\ell, \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + \ell = a + n\ell = a + (b-a) = b.
\end{aligned}
$$





La série statistique $\left(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})\right)$ à n termes a une moyenne :

$$u_n = \frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})}{n}$$

Un bon candidat pour la moyenne de la fonction continue f sur $[a;b]$ est

$$\lim_{n \to +\infty} u_n .$$

autrement dit la moyenne

$$\frac{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})}{n}$$

avec un grand nombre n de termes.

Etudions $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On a vu $\qquad l = \dfrac{b-a}{n}$, de telle sorte que

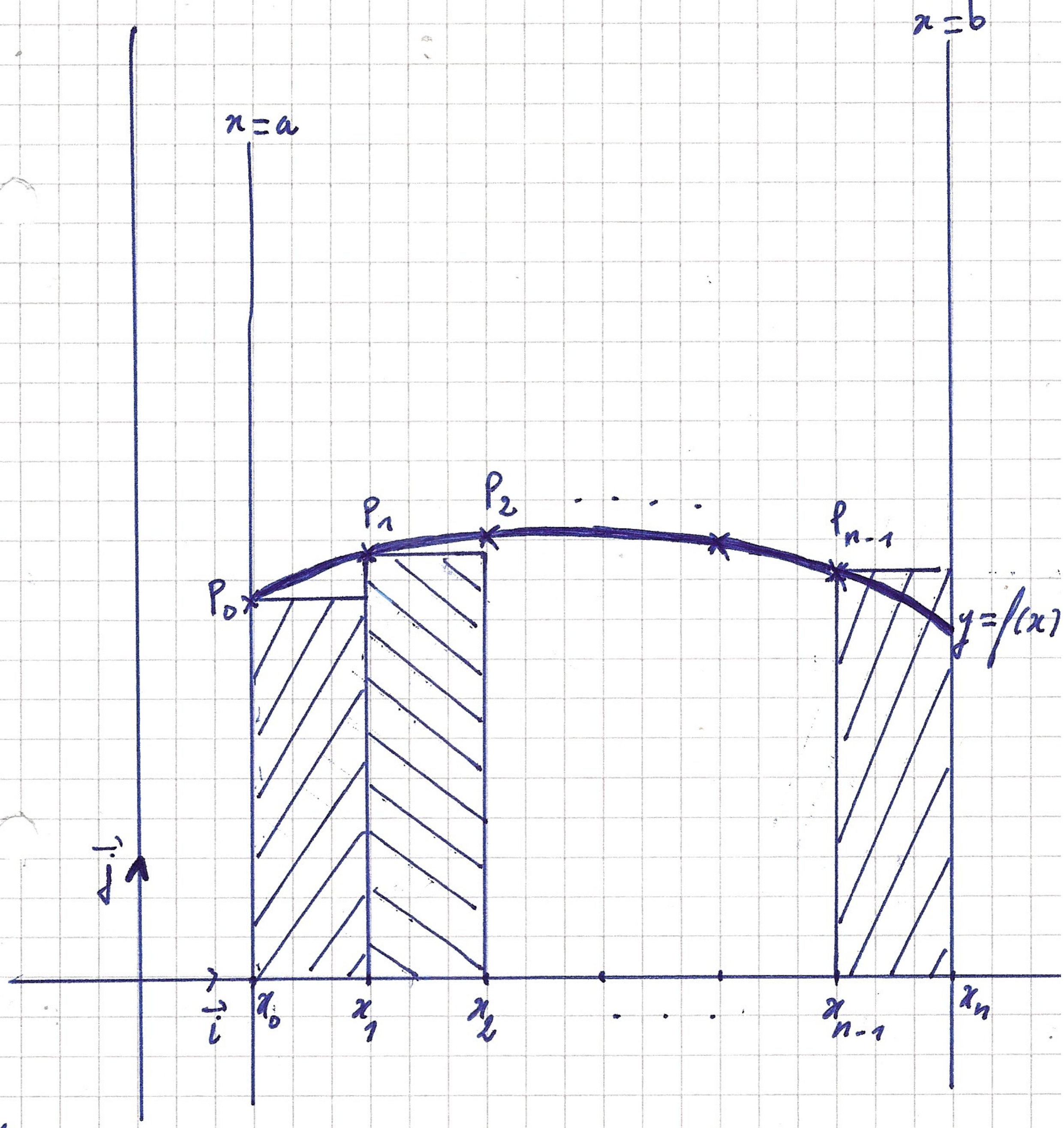
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{b-a} \times l$$

et

$$u_n = \frac{1}{n} f(x_0) + \frac{1}{n} f(x_1) + \cdots + \frac{1}{n} f(x_{n-1})$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[l \times f(x_0) + l \times f(x_1) + \cdots + l \times f(x_{n-1}) \right]$$

$l \times f(x_0)$, $l \times f(x_1)$, ..., $l \times f(x_{n-1})$ sont les aires, en u.a, des rectangles hachurés ci-dessous:



l'aire, en u.a, du premier rectangle est

$$l \times y_{P_0} = l \times f(x_0) \; ;$$

l'aire, en u.a, du second rectangle est

$$l \times y_{P_1} = l \times f(x_1) \ ;$$

$$\ldots$$

Par suite,

$$(b-a)u_n = l \times f(x_0) + l \times f(x_1) + \ldots + l \times f(x_{n-1})$$

est la somme des aires, en u.a, des aires des rectangles

- l'aire, en u.a, du premier rectangle, est proche de $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$

(d'autant plus proche que l est petit c'est-à-dire que n est grand).

- l'aire, en u.a, du second rectangle, est proche de $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

L'aire, en u.a, du dernier rectangle, est proche de $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$.

Par suite,

$$(b-a)\,u_n$$

est proche de

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

qui, d'après la relation de Chasles, est égal à

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\lim_{n \to +\infty} (b-a)\,u_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

: le bon candidat pour la moyenne de la fonction continue f sur $[a;b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.